

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG TẮM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN (FGM) THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO (HSDT)

Dương Thành Huân¹, Lê Minh Lư¹, Trần Minh Tú^{2*}

¹ *Khoa Cơ điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam*

² *Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng*

Email*: tpnt2002@yahoo.com

Ngày gửi bài: 02.10.2014

Ngày chấp nhận: 25.11.2014

TÓM TẮT

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials - FGM) là loại vật liệu không đồng nhất, đẳng hướng có tính chất cơ học thay đổi liên tục theo chiều dày của tấm. Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (Higher Order Shear Deformation Theory - HSDT) để phân tích dao động riêng của tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu giả thiết biến thiên theo qui luật hàm mũ, hệ số Poisson là hằng số theo tọa độ chiều dày. Hệ phương trình cân bằng động của tấm được xác định theo nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích, tỉ số các kích thước tấm đến tần số dao động riêng được khảo sát. Kết quả so sánh với các công bố trên các tạp chí quốc tế đã xuất bản nhằm kiểm chứng mô hình tính mà bài báo đã xây dựng.

Từ khóa: Dao động riêng, tấm có cơ tính biến thiên, lý thuyết biến dạng cắt.

Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using Higher Order Shear Deformation Theories (HSDT)

ABSTRACT

A higher order shear deformation theory (HSDT) was presented for free vibration analysis of simply supported (diaphragm), elastic functionally graded (FG), rectangular, plates. Functionally graded materials (FGMs), although heterogeneous, are idealized as continua with their mechanical properties changing smoothly with respect to the spatial coordinates. Poisson's ratio was assumed to be constant, but their Young's moduli and densities vary continuously in the thickness direction according to the volume fraction of constituents, which is mathematically modelled as power law function. The equations of motion were obtained using Hamilton's principle employing HSDT. Navier's solution was used to solve the equations of motion. The effect of variation of material properties in terms of gradation index, the effects of aspect ratios, thickness-to-side ratio on the natural frequencies of FG plates were studied in this article. The numerical results were compared with results available in the literature to validate theoretical model of the paper.

Keywords: Power-law functionally graded plate, shear deformation plate theory, vibration analysis.

1. MỞ ĐẦU

Vật liệu có cơ tính biến thiên (*Functionally Graded Materials - FGM*) là một loại vật liệu composite thể hệ mới có tính chất vật liệu thay đổi liên tục từ bề mặt này sang bề mặt khác, do vậy hạn chế được sự tập trung ứng suất, bong tách lớp thường gặp ở vật liệu composite nhiều

lớp thông thường. Vật liệu FGM điển hình được tạo thành từ hai thành phần: gốm (ceramic) và kim loại. Đây là loại vật liệu đẳng hướng, không đồng nhất, có khả năng chế tạo các kết cấu với những đặc tính mong muốn của người sử dụng trong điều kiện làm việc cụ thể, được xem như một loại vật liệu thông minh. Để đáp ứng nhu cầu sử dụng ngày một tăng, đòi hỏi phải nghiên

cấu, phát triển những mô hình tính toán phù hợp nhằm dự đoán những ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu FGM.

Những nghiên cứu tổng quan gần đây về phân tích tĩnh, dao động và ổn định của tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên có thể tìm thấy trong các bài báo của Jha và cộng sự (2012). Với tấm mỏng thường sử dụng lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff - Love, bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang. Khi chiều dày tấm tăng lên, biến dạng cắt có ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử của tấm FGM nên các lý thuyết biến dạng cắt thường dùng để phân tích tấm, như: lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT).

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) có kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang với trường chuyển vị màng biến thiên bậc nhất và cần phải đưa vào hệ số điều chỉnh cắt. Việc xác định các hệ số này là không đơn giản, do vậy nhiều tác giả đề xuất sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với các thành phần chuyển vị màng và độ võng biến thiên bậc cao. Ví dụ, Reddy (1984, 2000) đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) với các thành phần chuyển vị màng biến thiên theo hàm bậc ba. Xiang và cộng sự (2011, 2013) sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc n , trong đó lý thuyết của Reddy có thể được xem là một trường hợp riêng. Fares và đồng nghiệp (2009) đã đề nghị lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với dạng biến thiên bậc nhất và bậc hai của trường chuyển vị. Với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất bởi Reddy (2011), Chen và cộng sự (2009), Pradyumna và Bandyopadhyay (2008), Talha và Singh (2010) đã phát triển trên cơ sở các thành phần chuyển vị màng biến thiên bậc ba và độ võng biến thiên bậc hai. Neves và cộng sự (2013) đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với dạng chuyển vị màng biến thiên bậc ba và bậc hai đối với độ võng trên cơ sở cải tiến công thức của Carrera. Cùng với việc sử dụng hàm đa thức trong các nghiên cứu trên, hàm lượng giác cũng được sử dụng để phát triển các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Ví dụ, Zenkour (2006) trình bày lý thuyết biến dạng cắt tổng quát, trong đó

trường chuyển vị màng được khai triển dưới dạng hàm sin dọc theo chiều dày tấm. Mantari và đồng nghiệp (2012a, b, c, d) đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hàm lượng giác, trong đó có kể đến sự phân bố thích hợp của biến dạng cắt ngang dọc theo chiều dày tấm và thỏa mãn điều kiện biên ứng suất bằng không ở bề mặt trên và dưới của tấm mà không cần đến hệ số hiệu chỉnh cắt. Dựa vào mô hình Carrera cải tiến, Ferreira và cộng sự (2011) đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với việc sử dụng hàm sin cho cả trường chuyển vị màng và độ võng, trong khi Neves và cộng sự (2012) đã đề xuất các dạng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bằng việc sử dụng các cách khai triển khác nhau đối với các chuyển vị (như khai triển dạng hàm sin (Neves et al., 2012a) hay dạng hyperbol (Neves et al., 2012b)).

Ở Việt nam, trong những năm gần đây các nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu FGM phát triển mạnh. Phân tích phi tuyến uốn, dao động và ổn định của tấm FGM có các công bố của Nguyễn Đình Đức và cộng sự (2011, 2013, 2014). Đào Huy Bích, Đào Văn Dũng cùng các đồng nghiệp (2012, 2013) đi sâu về nghiên cứu phi tuyến tĩnh và động của các kết cấu vỏ FGM. Nhiều luận án về kết cấu tấm và vỏ FGM cũng đã được nhiều tác giả như Hoàng Văn Tùng, Nguyễn Thị Phương, Vũ Hoài Nam, Lê Khả Hòa,... thực hiện. Trong các nghiên cứu trên các tác giả phần lớn sử dụng lý thuyết tấm cổ điển, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất khi xây dựng lời giải giải tích. Nguyễn Đình Đức, Phạm Hồng Công (2011, 2013, 2014) tuy sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao nhưng cũng chỉ là lý thuyết bậc cao không đầy đủ của Reddy.

Mục đích của bài báo là thiết lập các hệ thức, các phương trình chủ đạo của tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tổng quát. Nghiệm giải tích theo dạng nghiệm Navier được sử dụng nhằm xác định tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGM tựa khớp trên chu vi. Các ví dụ số được thực hiện để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình và thuật toán đã xây dựng.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Vật liệu có cơ tính biến thiên

Đối với vật liệu có cơ tính biến thiên hai thành phần tạo thành từ sự kết hợp của kim loại và ceramic, tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu được giả thiết biến đổi theo qui luật xác định. Hàm đặc trưng cho các hằng số vật liệu có cơ tính biến thiên giả thiết dưới dạng sau (Reddy, 2000)

$$V(z) = V_m + (V_c - V_m).g(z) \quad (1)$$

Trong đó:

V_m là hằng số vật liệu của vật liệu mặt trên tấm $(-h/2)$;

V_c là hằng số vật liệu của vật liệu mặt dưới tấm $(+h/2)$;

$V(z)$ là hằng số vật liệu của vật liệu tại toạ độ z bất kỳ;

$g(z)$ là hàm tỉ lệ thể tích.

Qui luật phân bố của hàm tỉ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM. Phần lớn các nhà nghiên cứu sử dụng hàm lũy thừa, hàm e - mũ hoặc hàm Sigmoid để mô tả biến thiên của hàm

tỉ lệ thể tích. Hàm tỉ lệ thể tích dạng hàm lũy thừa viết dưới dạng sau:

$$g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1.a)$$

Trong đó, p là chỉ số tỉ lệ thể tích.

Trong bài báo này hệ số Poisson ν được giả thiết là hằng số, mô đun đàn hồi E và khối lượng riêng ρ của vật liệu FGM được giả thiết biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa và có dạng sau:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1.b)$$

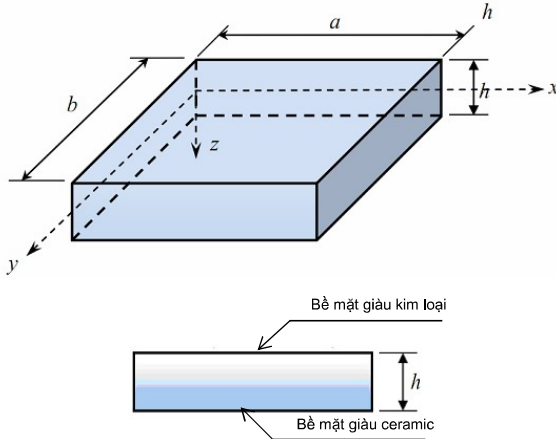
$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (1.c)$$

Hệ số Poisson được giả thiết là hằng số theo chiều dày.

2.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

2.2.1. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tại mỗi điểm bất kỳ trên tấm được khai triển theo chuỗi Taylor có dạng sau (Zenkour, 2006):



Hình 1. Mô hình kết cấu tấm làm từ vật liệu FGM

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + z^2 u_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_x^*(x, y, t); \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + z^2 v_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_y^*(x, y, t); \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\theta_z(x, y, t) + z^2 w_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_z^*(x, y, t); \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó:

u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z .

θ_x, θ_y là góc xoay của pháp tuyến mặt trung

bình tại điểm đang xét quanh trục y, x .

$u_0^*, v_0^*, w_0^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*$ và θ_z là các thành phần chuyển vị bậc cao trong khai triển Taylor các hàm chuyển vị.

Các thành phần biến dạng được xác định từ quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị trong lý thuyết đàn hồi, biểu diễn dưới dạng vec tơ:

$$\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}_0\} + z\{k\} + z^2\{\mathcal{E}_0^*\} + z^3\{k^*\}; \quad (3)$$

Trong đó:

$$\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{E}_0\} &= \{\mathcal{E}_{x0}, \mathcal{E}_{y0}, \mathcal{E}_{z0}, \gamma_{xy0}, \gamma_{yz0}, \gamma_{xz0}\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \theta_z, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\}; \\ \{\mathcal{E}_0^*\} &= \{\mathcal{E}_{x0}^*, \mathcal{E}_{y0}^*, \mathcal{E}_{z0}^*, \gamma_{xy0}^*, \gamma_{yz0}^*, \gamma_{xz0}^*\} = \left\{ \frac{\partial u_0^*}{\partial x}, \frac{\partial v_0^*}{\partial y}, 3\theta_z^*, \frac{\partial u_0^*}{\partial y} + \frac{\partial v_0^*}{\partial x}, 3\theta_y^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial y}, 3\theta_x^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \right\}; \\ \{k\} &= \{k_x, k_y, k_z, k_{xy}, k_{yz}, k_{xz}\} = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, 2w_0^*, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, 2v_0^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y}, 2u_0^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right\}; \\ \{k^*\} &= \{k_x^*, k_y^*, k_z^*, k_{xy}^*, k_{yz}^*, k_{xz}^*\} = \left\{ \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y}, 0, \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}, \frac{\partial \theta_z^*}{\partial y}, \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

2.2.2. Quan hệ ứng suất - biến dạng

Quan hệ tuyến tính giữa ứng suất - biến dạng của tấm FGM đẳng hướng với mô đun đàn hồi E biến thiên dạng hàm mũ theo chiều dày tấm ở trạng thái ứng suất khối có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Các thành phần trong ma trận độ cứng $[Q]$ ở trên được xác định bởi:

$$Q_{11} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E(z) = Q_{22} = Q_{33};$$

$$Q_{12} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E(z) = Q_{13} = Q_{23};$$

$$Q_{44} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} E(z) = Q_{55} = Q_{66}.$$

2.2.3. Các thành phần nội lực

Các thành phần nội lực trong tấm định nghĩa theo (6):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ N_{xy} \\ N_{yz} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^2 \end{bmatrix} dz;$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^2 \end{bmatrix} dz;$$

$$\begin{bmatrix} M_x & M_x^* \\ M_y & M_y^* \\ M_z & M_z^* \\ M_{xy} & M_{xy}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & z^3 \end{bmatrix} dz;$$

$$\begin{bmatrix} S_x & S_x^* \\ S_y & S_y^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & z^3 \end{bmatrix} dz;$$

Biểu diễn các thành phần ứng suất trong (6) bởi (5) ta thiết lập được quan hệ giữa nội lực - biến dạng (7) như sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_x^* \\ N_y^* \\ N_z \\ N_z^* \\ M_x \\ M_y \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_z^* \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xo} \\ \varepsilon_{yo} \\ \varepsilon_{xo}^* \\ \varepsilon_{yo}^* \\ \varepsilon_{zo} \\ \varepsilon_{zo}^* \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_z \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} N_{xy} \\ N_{xy}^* \\ M_{xy} \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xyo} \\ \varepsilon_{xyo}^* \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_x^* \\ S_x \\ S_x^* \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz0} \\ \gamma_{xz0}^* \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{xz}^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_y^* \\ S_y \\ S_y^* \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz0} \\ \gamma_{yz0}^* \\ \kappa_{yz} \\ \kappa_{yz}^* \end{Bmatrix};$$

Trong đó: các ma trận $[A]$, $[B]$, $[D]$, $[E]$ là các ma trận độ cứng của tấm. Các phần tử của ma trận này được tính toán theo các công thức trong phần phụ lục của bài báo.

2.3. Hệ phương trình cân bằng động

Hệ phương trình cân bằng động tương ứng với trường chuyển vị bậc cao được thiết lập theo nguyên lý Hamilton và có dạng (8):

$$\begin{aligned} \delta u_o: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\theta}_x + I_3 \ddot{u}_o^* + I_4 \ddot{\theta}_x^*; \\ \delta v_o: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\theta}_y + I_3 \ddot{v}_o^* + I_4 \ddot{\theta}_y^*; \\ \delta w_o: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{w}_o + I_2 \ddot{\theta}_z + I_3 \ddot{w}_o^* + I_4 \ddot{\theta}_z^*; \\ \delta u_o^*: \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= I_3 \ddot{u}_o + I_4 \ddot{\theta}_x + I_5 \ddot{u}_o^* + I_6 \ddot{\theta}_x^*; \\ \delta v_o^*: \frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y &= I_3 \ddot{v}_o + I_4 \ddot{\theta}_y + I_5 \ddot{v}_o^* + I_6 \ddot{\theta}_y^*; \\ \delta w_o^*: \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z &= I_3 \ddot{w}_o + I_4 \ddot{\theta}_z + I_5 \ddot{w}_o^* + I_6 \ddot{\theta}_z^*; \\ \delta \theta_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \ddot{u}_o + I_3 \ddot{\theta}_x + I_4 \ddot{u}_o^* + I_5 \ddot{\theta}_x^*; \\ \delta \theta_x^*: \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= I_4 \ddot{u}_o + I_5 \ddot{\theta}_x + I_6 \ddot{u}_o^* + I_7 \ddot{\theta}_x^*; \\ \delta \theta_y: \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= I_2 \ddot{v}_o + I_3 \ddot{\theta}_y + I_4 \ddot{v}_o^* + I_5 \ddot{\theta}_y^*; \\ \delta \theta_y^*: \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* &= I_4 \ddot{v}_o + I_5 \ddot{\theta}_y + I_6 \ddot{v}_o^* + I_7 \ddot{\theta}_y^*; \\ \delta \theta_z: \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - N_z &= I_2 \ddot{w}_o + I_3 \ddot{\theta}_z + I_4 \ddot{w}_o^* + I_5 \ddot{\theta}_z^*; \\ \delta \theta_z^*: \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial y} - 3N_z^* &= I_4 \ddot{w}_o + I_5 \ddot{\theta}_z + I_6 \ddot{w}_o^* + I_7 \ddot{\theta}_z^* \end{aligned}$$

Trong đó các thành phần mô men quán tính ly tâm được tính theo công thức sau:

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (9)$$

2.4. Nghiệm Navier

Với tám chữ nhật với chiều dài a và chiều rộng b với bốn biên tựa khớp. Có thể chọn dạng nghiệm của hệ phương trình trên dạng chuỗi lượng giác kép (10):

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0_{mn}} \cos \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cdot \cos \beta y e^{-i\omega t};$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} \sin \alpha x \cdot \cos \beta y e^{-i\omega t};$$

$$u_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn}^* \cos \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$v_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn}^* \sin \alpha x \cdot \cos \beta y e^{-i\omega t};$$

$$w_0^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn}^* \sin \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_x^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn}^* \cos \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_y^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn}^* \sin \alpha x \cdot \cos \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_z^* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn}^* \sin \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

$$\theta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn} \sin \alpha x \cdot \sin \beta y e^{-i\omega t};$$

Trong đó:

$$i = \sqrt{-1}; \alpha = m\pi / a;$$

$$\beta = n\pi / b; m, n = 1, 3, 5, \dots;$$

ω là tần số vòng.

Thay các thành phần chuyển vị trong (10) vào biểu thức biến dạng (4), rồi thay các thành phần biến dạng này vào biểu thức các thành phần nội lực (7). Sau đó thay các thành phần nội lực vào hệ phương trình cân bằng động (8) ta nhận được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị. Đồng nhất hóa các hệ số của hệ phương trình này ta nhận được phương trình xác định tần số dao động riêng có dạng (11) như sau:

$$\left([S]_{12 \times 12} - \omega^2 [M]_{12 \times 12} \right) \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \\ \theta_{zmn} \\ u_{0mn}^* \\ v_{0mn}^* \\ w_{0mn}^* \\ \theta_{xmn}^* \\ \theta_{ymn}^* \\ \theta_{zmn}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Trong đó: $[S]$ là ma trận các hệ số độ cứng, $[M]$ là ma trận khối lượng và ω là tần số dao động riêng (tần số vòng của hệ tọa độ góc) với dạng thứ m theo phương x và dạng thứ n theo phương y . Nhờ sự trợ giúp của phần mềm Matlab giải bài toán tìm trị riêng của phương trình $[S] - \omega^2 [M] = 0$ ta tìm được các tần số dao động riêng ω của tấm FGM.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Vi dụ 1: Kiểm chứng kết quả số của thuật toán và chương trình tính tự viết trong môi trường Matlab

Xét tấm hình vuông ($b/a = 1$) liên kết gối tựa đơn giản trên chu vi với chiều dày tấm $h = 0,01$ (m), tỉ số $a/h = 10$, vật liệu FGM Al/Al_2O_3 với tính chất các vật liệu thành phần:

Kim loại (Al):

$$E_m = 70 \text{ (GPa)}; \rho_m = 2.702 \text{ (kg / m}^3\text{)}$$

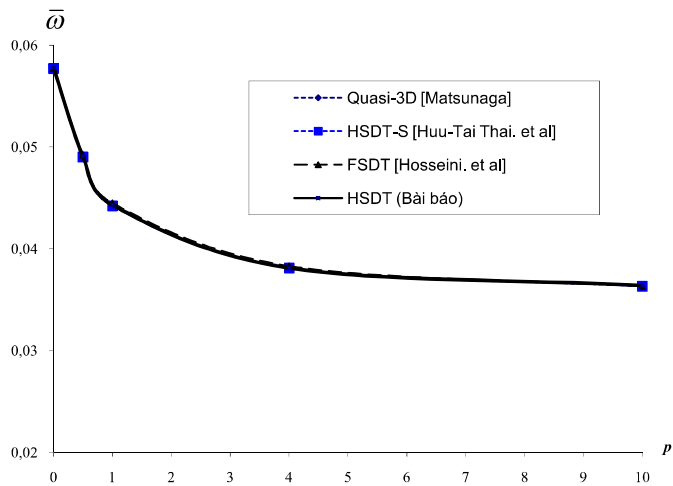
Ceramic (Al_2O_3):

$$E_c = 380 \text{ (GPa)}; \rho_c = 3.800 \text{ (kg / m}^3\text{)};$$

Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên ($m = n = 1$) của tấm trình bày trong bảng 1 và được so sánh với lời giải bán đàn hồi trích dẫn theo (2008) và lời giải theo lý thuyết chuyển vị bậc cao đơn giản (với 5 ẩn chuyển vị) của Huu-Tai Thai (2013), lời giải theo lý thuyết

Bảng 1. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ của tấm vuông FGM với thành phần vật liệu Al/Al_2O_3 khi chỉ số tỉ lệ thể tích p thay đổi

Phương pháp	Tỉ số a/h	Chỉ số tỉ lệ thể tích (p)				
		0	0,5	1	4	10
Quasi-3D (Matsunaga, 2008)	10	0,0578	0,0492	0,0443	0,0381	0,0364
HSDT-S (Hosseini, 2010)		0,0577	0,0490	0,0442	0,0381	0,0363
FSDT (Huu- Tai Thai, 2013)		0,0577	0,0492	0,0445	0,0383	0,0363
HSDT (Bài báo)		0,0578	0,0491	0,0443	0,0381	0,0364



Hình 2. Đồ thị quan hệ giữa tần số không thứ nguyên và chỉ số thể tích p

biến dạng cắt bậc nhất (với 5 ẩn chuyển vị) của Hoseimi (2010).

Từ bảng 1 và hình vẽ 2 ta thấy tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao là tương đồng với các kết quả tham chiếu cho thấy độ tin cậy của lời giải mà các tác giả đã xây dựng. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm giảm nhiều khi chỉ số tỉ lệ thể tích p tăng lên, chỉ số tỉ lệ thể tích p càng lớn thì tốc độ thay đổi của tần số dao động riêng của tấm giảm dần vì khi đó sự làm việc của vật liệu lúc này càng gần với vật liệu kim loại.

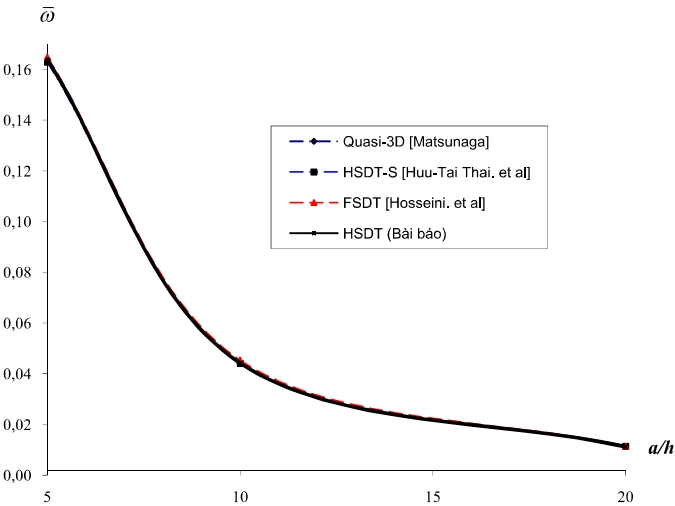
Ví dụ 2: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ số chiều dày tấm và kích thước cạnh (a/h).

Xét tấm hình vuông ($b/a = 1$) liên kết gối tựa đơn giản trên chu vi với chiều dày tấm $h = 0,01$ (m), tỉ số $a/h = 10$, vật liệu FGM Al/Al_2O_3 với tính chất các vật liệu thành phần (như trong Ví dụ 1). Chỉ số tỉ lệ thể tích $p = 1$; $m = n = 1$.

Giá trị tần số không thứ nguyên cơ bản của tấm $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ được tính toán và kiểm chứng theo các lý thuyết tấm khác nhau (Matsunaga, 2008; Hosseini, 2010; Huu- Tai Thai, 2013). Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên thể hiện trong bảng 2 và biểu diễn bằng đồ thị trên hình 3.

Bảng 2. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ của tấm vuông FGM Al/Al₂O₃ khi tỉ số giữa cạnh - chiều dày của tấm (a/h) thay đổi

Phương pháp	Chỉ số tỉ lệ thể tích p	Tỉ số a/h			
		5	10	20	50
Quasi-3D (Matsunaga, 2008)	1	0,1640	0,0443	0,0114	0,0018
HSDT-S (Hosseini, 2010)		0,1631	0,0442	0,0115	0,0018
FSDT (Huu- Tai Thai, 2013)		0,1650	0,0454	0,0115	0,0018
HSDT (Bài báo)		0,1640	0,0443	0,0113	0,0018



Hình 3. Đồ thị quan hệ giữa tần số dao động riêng không thứ nguyên theo tỉ số a/h

Từ bảng 2 và hình vẽ 3 cho thấy với cùng một giá trị chỉ số thể tích ($p = 1$), khi tỉ số kích thước a/h càng lớn (tấm càng mỏng), tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm càng giảm, giảm nhanh trong khoảng $5 < a/h < 20$, khi $a/h > 20$ thì sự thay đổi này chậm dần.

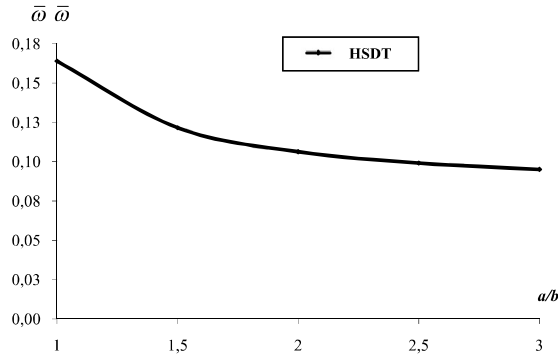
Đặc biệt, khi tấm dày ($a/h = 5$) thì có sự sai lệch đáng kể giữa các kết quả tính theo các lý thuyết khác nhau, lời giải của bài báo trùng với kết quả tính theo lời giải bán đàn hồi cho thấy độ chính xác của mô hình bậc cao tổng quát đối với tấm dày.

Ví dụ 3: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ số kích thước các cạnh của tấm (a/b).

Xét tấm chữ nhật FGM với chiều dày tấm $h = 0,01$ (m), tỉ số $a/h = 5$, chỉ số tỉ lệ thể tích $p = 1$, $m = n = 1$. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm FGM chữ nhật khi tỉ số giữa các cạnh của tấm (a/b) thay đổi ($a/b = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$) trình bày trong bảng 3. Đồ thị biến thiên của tần số dao động riêng không thứ nguyên theo tỉ số a/b biểu diễn trên hình 4.

Bảng 3. Tần số không thứ nguyên $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ của tấm hình chữ nhật FGM Al/Al_2O_3 khi tỉ số kích thước các cạnh của tấm (a/b) thay đổi

Phương pháp	Tỉ số $a/h = 5$				
	Tỉ số a/b				
HSDT (Bài báo)	1	1,5	2	2,5	3
	0,1640	0,1216	0,1063	0,0991	0,0951



Hình 4. Đồ thị quan hệ giữa tần số không thứ nguyên và tỉ số kích thước tấm a/b

Từ bảng 3 và hình vẽ 4 ta thấy tần số dao động riêng của tấm giảm dần khi tỉ số kích thước của tấm a/b tăng lên.

cũng đã được kiểm chứng với lời giải bán đàn hồi, cũng như với lời giải theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và bậc cao đơn giản.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng lời giải giải tích khi phân tích dao động riêng của tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi bằng vật liệu có cơ tính biến thiên trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

Ảnh hưởng của tỉ lệ kích thước cạnh/chiều dày tấm (a/h), tham số vật liệu (chỉ số tỉ lệ thể tích p) đến tần số dao động riêng đã được khảo sát. Kết quả cho thấy, tần số dao động riêng đã giảm đáng kể khi chỉ số tỉ lệ thể tích tăng lên. So với các lý thuyết tấm cổ điển (CPT), lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tổng quát đòi hỏi khối lượng tính toán lớn (12 ẩn số chuyển vị) nhưng cho kết quả chính xác hơn với các tấm dày mà không cần phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Độ tin cậy của lời giải giải tích mà bài báo xây dựng

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Dao Huy Bích, Dao Van Dung, Vu Hoai Nam, Nguyen Thi Phuong (2013). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression. International Journal of Mechanical Sciences, 74: 190-200.
- Dao Huy Bích, Dao Van Dung, Vu Hoai Nam (2012). Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels. Composite Structures, 94: 2465-2473
- Chen CS, Hsu CY, Tzou GJ (2009). Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory. J Reinf Plast Compos, 28(10): 1215-34.
- Nguyen Dinh Duc, Hoang Van Tung (2011). Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations. Composite Structures, 93: 2874-2881.

- Nguyen Dinh Duc, Pham Hong Cong (2014). Nonlinear postbuckling of an eccentrically stiffened thin FGM plate resting on elastic foundations in thermal environments. *Thin-Walled Structures*, 75: 103-112.
- Nguyen Dinh Duc, Pham Hong Cong (2013). Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments. *Composite Structures*, 100: 566-574.
- DaoVan Dung, Le Kha Hoa, Nguyen Thi Nga, Le Thi Ngoc Anh (2013). Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads. *Composite Structures*, 106: 104-113.
- Fares ME, Elmarghany MK, Atta D (2009). An efficient and simple refined theory for bending and vibration of functionally graded plates. *Compos Struct*, 91(3): 296-305.
- Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Polit O (2011). Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *Compos Part B: Eng*, 42(5): 1276-84.
- Jha. D.K, Tarun Kant, Singh .R.K (2012). Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design* 250: 8-13.
- Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim (2013). A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 96: 165-173.
- Hosseini-Hashemi. Sh, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan, M. Omid (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34: 1276-1291.
- Huu-Tai Thai, Dong-Ho Choi (2013). A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 101: 332-340.
- Kant.T, Swaminathan.K (2001). Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. *Composite Structures*, 53: 73-85.
- Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. (2012a). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos Part B: Eng*, 43(3): 1489-99.
- Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C (2012b). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int J Solids Struct*, 49(1): 43-53.
- Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C (2012c). Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos Struct*, 94(2): 714-23.
- Mantari JL, Guedes Soares C (2012d). Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos Struct*, 94(8): 2561-75.
- Matsunaga H (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct*, 82(4): 499-512.
- Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al (2012a). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Part B: Eng*, 43(2): 711-25.
- Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al (2012b). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct*, 94(5): 1814-25.
- Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Compos Part B: Eng*, 44(1): 657-74.
- Pradyumna S, Bandyopadhyay JN (2008). Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. *J Sound Vib*, 318(1-2): 176-92.
- Reddy JN (2000). Analysis of functionally graded plates. *Int J Numer Methods Eng*, 47(1-3): 663-84.
- Reddy JN (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl, Mech*, 51: 745-52.
- Reddy JN (2011). A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int J Aerospace Lightweight Struct*, 1(1):1-21.
- Talha M, Singh BN (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model*, 34(12): 3991-4011.
- Xiang S, Kang GW (2013). A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *Eur J Mech - A/Solids*, 37: 336-43.
- Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS (2011). A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct*, 93(11):2826-32.
- Zenkour AM (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*, 30(1): 67-84.

PHỤ LỤC

Các ma trận $[A], [B], [D], [E]$ trong công thức (7) có dạng như sau:

$$[A] = \begin{bmatrix} Q_{11}H_1 & Q_{12}H_1 & Q_{11}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{13}H_1 & 3Q_{13}H_3 & Q_{11}H_2 & Q_{12}H_2 & Q_{11}H_4 & Q_{12}H_4 & 2Q_{13}H_3 \\ Q_{12}H_1 & Q_{22}H_1 & Q_{12}H_3 & Q_{22}H_3 & Q_{23}H_1 & 3Q_{23}H_3 & Q_{12}H_2 & Q_{22}H_2 & Q_{12}H_4 & Q_{22}H_4 & 2Q_{23}H_2 \\ Q_{11}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_5 & Q_{12}H_5 & Q_{13}H_3 & 3Q_{13}H_5 & Q_{11}H_4 & Q_{12}H_4 & Q_{11}H_6 & Q_{12}H_6 & 2Q_{13}H_4 \\ Q_{12}H_3 & Q_{22}H_3 & Q_{12}H_5 & Q_{22}H_5 & Q_{23}H_3 & 3Q_{23}H_5 & Q_{12}H_4 & Q_{22}H_4 & Q_{12}H_6 & Q_{22}H_6 & 2Q_{23}H_4 \\ Q_{13}H_1 & Q_{23}H_1 & Q_{13}H_3 & Q_{23}H_3 & Q_{33}H_1 & 3Q_{33}H_3 & Q_{13}H_2 & Q_{23}H_2 & Q_{13}H_4 & Q_{23}H_4 & 2Q_{33}H_2 \\ Q_{13}H_3 & Q_{23}H_3 & Q_{13}H_5 & Q_{23}H_5 & Q_{33}H_3 & 3Q_{33}H_5 & Q_{13}H_4 & Q_{23}H_4 & Q_{13}H_6 & Q_{23}H_6 & 2Q_{33}H_4 \\ Q_{11}H_2 & Q_{12}H_2 & Q_{11}H_4 & Q_{12}H_4 & Q_{13}H_2 & 3Q_{13}H_4 & Q_{11}H_3 & Q_{12}H_3 & Q_{11}H_5 & Q_{12}H_5 & 2Q_{13}H_3 \\ Q_{12}H_2 & Q_{22}H_2 & Q_{12}H_4 & Q_{22}H_4 & Q_{23}H_2 & 3Q_{23}H_4 & Q_{12}H_3 & Q_{22}H_3 & Q_{12}H_5 & Q_{22}H_5 & 2Q_{23}H_3 \\ Q_{11}H_4 & Q_{12}H_4 & Q_{11}H_6 & Q_{12}H_6 & Q_{13}H_4 & 3Q_{13}H_6 & Q_{11}H_5 & Q_{12}H_5 & Q_{11}H_7 & Q_{12}H_7 & 2Q_{13}H_5 \\ Q_{12}H_4 & Q_{22}H_4 & Q_{12}H_6 & Q_{22}H_6 & Q_{23}H_4 & 3Q_{23}H_6 & Q_{12}H_5 & Q_{22}H_5 & Q_{12}H_7 & Q_{22}H_7 & 2Q_{23}H_5 \\ Q_{13}H_2 & Q_{23}H_2 & Q_{13}H_4 & Q_{23}H_4 & Q_{33}H_2 & 3Q_{33}H_4 & Q_{13}H_3 & Q_{23}H_3 & Q_{13}H_5 & Q_{23}H_5 & 2Q_{33}H_3 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} Q_{44}H_1 & Q_{44}H_3 & Q_{44}H_2 & Q_{44}H_4 \\ Q_{44}H_3 & Q_{44}H_5 & Q_{44}H_4 & Q_{44}H_6 \\ Q_{44}H_2 & Q_{44}H_4 & Q_{44}H_3 & Q_{44}H_5 \\ Q_{44}H_4 & Q_{44}H_6 & Q_{44}H_5 & Q_{44}H_7 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} Q_{66}H_1 & Q_{66}H_3 & Q_{66}H_2 & Q_{66}H_4 \\ Q_{66}H_3 & Q_{66}H_5 & Q_{66}H_4 & Q_{66}H_6 \\ Q_{66}H_2 & Q_{66}H_4 & Q_{66}H_3 & Q_{66}H_5 \\ Q_{66}H_4 & Q_{66}H_6 & Q_{66}H_5 & Q_{66}H_7 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} Q_{55}H_1 & Q_{55}H_3 & Q_{55}H_2 & Q_{55}H_4 \\ Q_{55}H_3 & Q_{55}H_5 & Q_{55}H_4 & Q_{55}H_6 \\ Q_{55}H_2 & Q_{55}H_4 & Q_{55}H_3 & Q_{55}H_5 \\ Q_{55}H_4 & Q_{55}H_6 & Q_{55}H_5 & Q_{55}H_7 \end{bmatrix}$$

Trong đó các hệ số $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$ được tính theo công thức sau:

$$H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz$$